Eliminación Gausiana con matrices elementales

José Luis Gómez-Muñoz
http://homepage.cem.itesm.mx/lgomez/

Ejemplo 1

Realizaremos las siguientes operaciones para la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

1.a. *Usaremos productos con matrices elementales para obtener* $\boldsymbol{A}^{-1}$*, es decir, la inversa de la matriz* ***A****.*
1.b. *Representaremos a la matriz* ***A*** *como un producto de las matrices elementales inversas a las obtenidas en el incisio anterior.*
1.c. *Mostraremos gráficamente como cada operación elemental del inciso anterior va transformando al cuadrado unitario hasta obtener la misma transformación total que lleva a cabo la matriz* ***A****.*

1.a. Uso de matrices elementales para obtener A^{-1}

Esta es la matriz **A** con la cual trabajaremos. Observa que *Mathematica* la representa como una lista de listas. La primera lista es el primer renglón y la segunda lista es el segundo renglón:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
{{4, 0}, {-1, 2}}
```

Vamos a multiplicar a **A** por la izquierda con matrices elementales hasta que el producto sea la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la cual *Mathematica* mostrará como **{{1,0},{0,1}}**

Las matrices elementales que podemos ir multiplicando por la izquierda son:

1. $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene el efecto de multiplicar el primer renglón por una constante; o $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ que tiene el efecto de multiplicar el segundo renglón por una constante; en ambos casos con ***k*** diferente de cero.

2. $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene el efecto de sumarle al primer renglón un múltiplo del segundo renglón; o $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ que tiene el efecto sumarle al segundo renglón un múltiplo del primer renglón.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ que tiene el efecto de intercambiar renglones.

La primera operación que haremos será convertir al elemento en el primer renglón y primera columna en **1**, mediante la mutiplicación por la izquierda con la matriz elemental adecuada. Recuerda que hay que escribir un **punto** entre las dos matrices para que *Mathematica* las multiplique de la forma correcta:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 0}, {-1, 2}}
```

A continuación convertiremos el elemento en el segundo renglón y primera columna en **0**, mediante la mutiplicación por la izquierda con la matriz elemental adecuada. Recuerda que hay que escribir un **punto** entre las dos matrices para que *Mathematica* las multiplique de la forma correcta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 0}, {0, 2}}
```

A continuación convertiremos el elemento en el segundo renglón y segunda columna en **1**, mediante la mutiplicación por la izquierda con la matriz elemental adecuada. Recuerda que hay que escribir un **punto** entre las dos matrices para que *Mathematica* las multiplique de la forma correcta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 0}, {0, 1}}
```

Ya conseguimos una multiplicación de matrices elementales que convierte a la matriz **A** en la matriz identidad. Podemos tomar al producto de las matrices elementales para obtener una única matriz que hace el mismo trabajo. Recuerda que hay que escribir un **punto** entre las dos matrices para que *Mathematica* las multiplique de la forma correcta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\left\{\frac{1}{4}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right\}\right\}$$

Es decir, la matriz que al mutiplicar la matriz **A** la convierte en la matriz identidad es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\left\{\frac{1}{4}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right\}\right\}$$

A continuación comprobamos que la multiplicación da la identidad. Recuerda que hay que escribir un **punto** entre las dos matrices para que *Mathematica* las multiplique de la forma correcta:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
{{1, 0}, {0, 1}}
```

Es decir, la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es la matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

1.b. Representando A como producto de matrices elementales inversas a las que fueron usadas para obtener A^{-1}

Para "despejar" a la matriz **A** en términos de matrices elementales, necesitamos las matrices elementales inversas.
Observa que es diferente la forma de obtener la inversa para cada tipo de matriz elemental:

Para una matriz del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{k} \end{pmatrix}$ la matriz inversa es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{k}} \end{pmatrix}$

Para una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz inversa es $\begin{pmatrix} \frac{1}{\mathbf{k}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para una matriz del tipo $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para una matriz del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{k} & 1 \end{pmatrix}$ la matriz inversa es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{k} & 1 \end{pmatrix}$

Para la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz inversa es la misma $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

En el inciso anterior encontramos un producto de matrices elementales que al aplicarlas a la matriz **A** se obtiene la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Observa que entre los dos lados de la ecuación se escriben dos signos de igual ==. Si está correcto lo que escribimos, *Mathematica* debe responder **True**, indicando que es cierto que el lado izquierdo de la ecuación es igual al lado derecho:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
True
```

Para avanzar en el "despeje" de **A**, quitamos del lado izquierdo una matriz, y del lado derecho ponemos su inversa. Si está correcto lo que escribimos, *Mathematica* debe responder **True**, indicando que es cierto que el lado izquierdo de la ecuación es igual al lado derecho:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
True
```

Para avanzar en el "despeje" de **A**, quitamos del lado izquierdo una matriz, y del lado derecho ponemos su inversa. Si está correcto lo que escribimos, *Mathematica* debe responder **True**, indicando que es cierto que el lado izquierdo de la ecuación es igual al lado derecho:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
True
```

Para avanzar en el "despeje" de **A**, quitamos del lado izquierdo una matriz, y del lado derecho ponemos su inversa. Si está correcto lo que escribimos, *Mathematica* debe responder **True**, indicando que es cierto que el lado izquierdo de la ecuación es igual al lado derecho:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
True
```

Finalmente podemos quitar la matriz identidad del lado derecho, ya que la multiplicación por la identidad da lo mismo:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
True
```

Comprobamos que nuestro producto de matrices da la matriz **A**:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

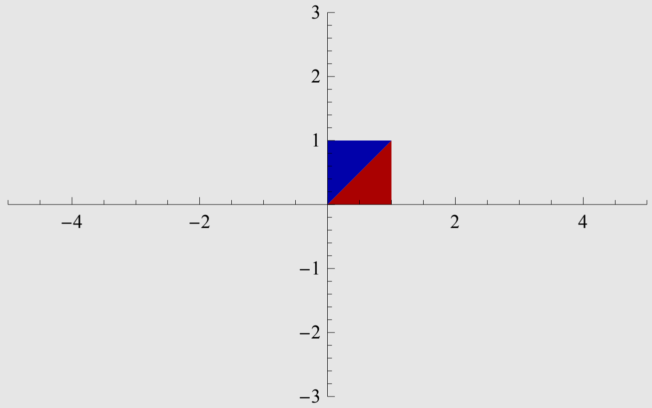
```
{{4, 0}, {-1, 2}}
```

Es decir, la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es el resultado de la multiplicación $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1.c. Efecto geométrico de las matrices elementales del inciso anterior

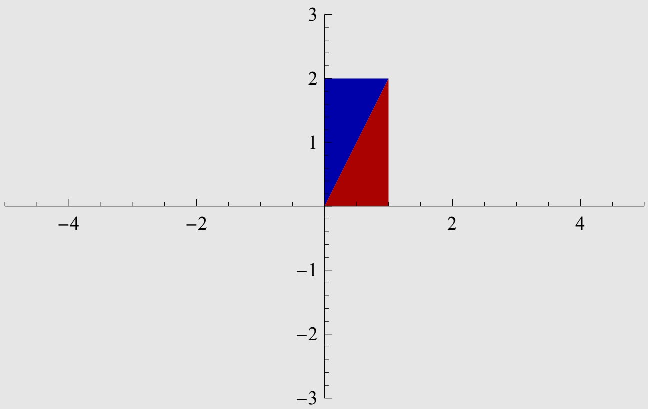
Este es el cuadrado unitario

```
Graphics[
 GraphicsComplex[
  { {0, 0},  {1, 0}, {1, 1}, {0, 1} },
  { Darker[Red],  Polygon[ {1, 2, 3} ],
   Darker[Blue], Polygon[ {3, 4, 1} ] } ],
 PlotRange → {{-5, 5}, {-3, 3}}, Axes → True]
```



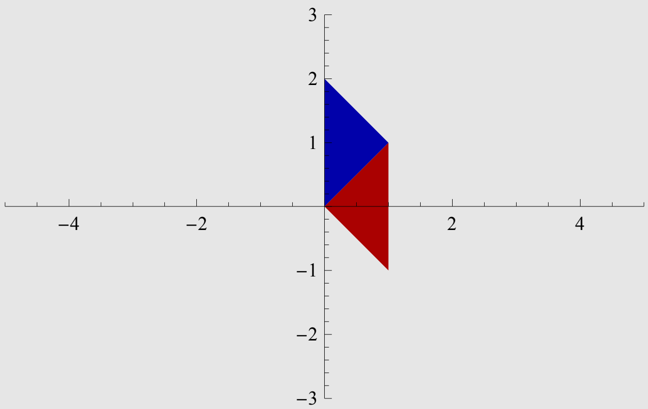
Al cuadrado unitario le aplicamos la primera (**de derecha a izquierda**) de las matrices que encontramos antes:

```
Graphics[
 GeometricTransformation[
  GraphicsComplex[
   { {0, 0},  {1, 0}, {1, 1}, {0, 1} },
   { Darker[Red],  Polygon[ {1, 2, 3} ],
    Darker[Blue], Polygon[ {3, 4, 1} ] } ],
  (1 0
   0 2)
 ],
 PlotRange → {{-5, 5}, {-3, 3}}, Axes → True]
```



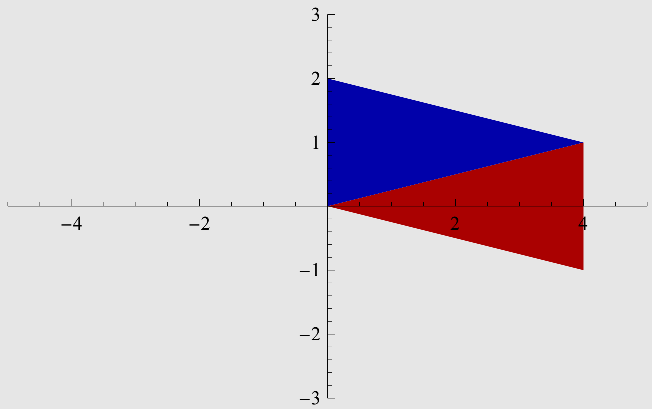
A la figura que resultó, le aplicamos la siguiente matriz a la izquierda:

```
Graphics[
 GeometricTransformation[
  GraphicsComplex[
   { {0, 0},  {1, 0}, {1, 1}, {0, 1} },
   { Darker[Red],  Polygon[ {1, 2, 3} ],
    Darker[Blue], Polygon[ {3, 4, 1} ] } ],
  ( 1  0 ) . ( 1 0 )
  (-1  1 )   ( 0 2 )
 ],
 PlotRange → {{-5, 5}, {-3, 3}}, Axes → True]
```



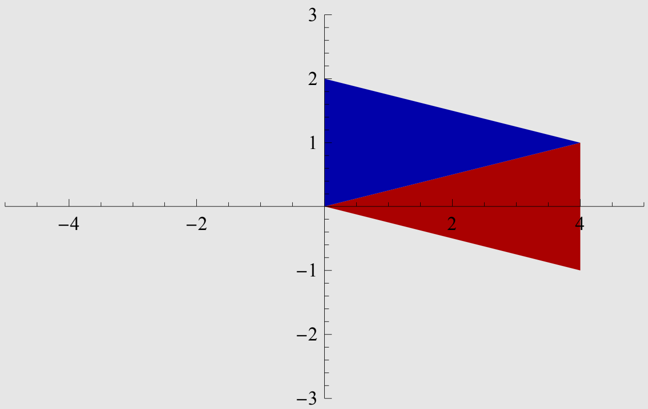
Finalmente aplicamos todas las matrices que se encontraron en el inciso anterior:

```
Graphics[
 GeometricTransformation[
  GraphicsComplex[
   {{0, 0}, {1, 0}, {1, 1}, {0, 1}},
   {Darker[Red], Polygon[{1, 2, 3}],
    Darker[Blue], Polygon[{3, 4, 1}]}],
  (4 0
   0 1).(1  0
        -1  1).(1 0
                0 2)
 ],
 PlotRange → {{-5, 5}, {-3, 3}}, Axes → True]
```



Podemos ver que la matriz **A** por si sola tiene el mismo efecto total que todas las matrices encontradas en el inciso anterior:

```
Graphics[
 GeometricTransformation[
  GraphicsComplex[
   { {0, 0},  {1, 0}, {1, 1}, {0, 1} },
   { Darker[Red],  Polygon[ {1, 2, 3} ],
    Darker[Blue], Polygon[ {3, 4, 1} ] } ],
  ( 4  0
   -1  2 )
 ],
 PlotRange → {{-5, 5}, {-3, 3}}, Axes → True]
```



Ejemplo 2

Realizaremos las siguientes operaciones para la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

2.a. *Usaremos productos con matrices elementales para obtener* $\mathbf{A}^{-1}$*, es decir, la inversa de la matriz* ***A****.*
2.b. *Representaremos a la matriz* ***A*** *como un producto de las matrices elementales inversas a las obtenidas en el incisio anterior.*
2.c. *Mostraremos gráficamente como cada operación elemental del inciso anterior va transformando al cuadrado unitario hasta obtener la misma transformación total que lleva a cabo la matriz* ***A****.*

2.a. Uso de matrices elementales para obtener A^{-1}

Esta es la matriz **A** con la cual trabajaremos. Observa que *Mathematica* la representa como una lista de listas. La primera lista es el primer renglón y la segunda lista es el segundo renglón:

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left\{\left\{3, \frac{3}{2}\right\}, \left\{1, \frac{3}{2}\right\}\right\}$$

Vamos a multiplicar a **A** por la izquierda con matrices elementales hasta que el producto sea la matriz identidad $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$, la cual *Mathematica* mostrará como **{{1,0},{0,1}}**
Las matrices elementales que podemos ir multiplicando por la izquierda son:

1. $\begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene el efecto de multiplicar el primer renglón por una constante; o $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$ que tiene el efecto de multiplicar el segundo renglón por una constante; en ambos casos con ***k*** diferente de cero.

2. $\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene el efecto de sumarle al primer renglón un múltiplo del segundo renglón; o $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \boldsymbol{k} & 1 \end{pmatrix}$ que tiene el efecto sumarle al segundo renglón un múltiplo del primer renglón.

3. $\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$ que tiene el efecto de intercambiar renglones.

La primera operación que haremos será convertir al elemento en el primer renglón y primera columna en **1**, mediante la mutiplicación por la izquierda con la matriz elemental adecuada. Recuerda que hay que escribir un **punto** entre las dos matrices para que *Mathematica* las multiplique de la forma correcta.
La operación es un intercambio de renglones:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$\{\{1, \frac{3}{2}\}, \{3, \frac{3}{2}\}\}$

A continuación convertiremos el elemento en el segundo renglón y primera columna en **0**, mediante la mutiplicación por la izquierda con la matriz elemental adecuada. Recuerda que hay que escribir un **punto** entre las dos matrices para que *Mathematica* las multiplique de la forma correcta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$\{\{1, \frac{3}{2}\}, \{0, -3\}\}$

A continuación convertiremos el elemento en el segundo renglón y segunda columna en **1**, mediante la mutiplicación por la izquierda con la matriz elemental adecuada. Recuerda que hay que escribir un **punto** entre las dos matrices para que *Mathematica* las multiplique de la forma correcta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$\{\{1, \frac{3}{2}\}, \{0, 1\}\}$

A continuación convertiremos el elemento en el primer renglón y segunda columna en **0**, mediante la mutiplicación por la izquierda con la matriz elemental adecuada. Recuerda que hay que escribir un **punto** entre las dos matrices para que *Mathematica* las multiplique de la forma correcta:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

{{1, 0}, {0, 1}}

Ya conseguimos una multiplicación de matrices elementales que convierte a la matriz **A** en la matriz identidad. Podemos tomar al producto de las matrices elementales para obtener una única matriz que hace el mismo trabajo. Recuerda que hay que escribir un **punto** entre las dos matrices para que *Mathematica* las multiplique de la forma correcta:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\{\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}, \{-\frac{1}{3}, 1\}\}$

Es decir, la matriz que al mutiplicar la matriz **A** la convierte en la matriz identidad es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}, \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}\right\}$$

A continuación comprobamos que la multiplicación da la identidad. Recuerda que hay que escribir un **punto** entre las dos matrices para que *Mathematica* las multiplique de la forma correcta:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

```
{{1, 0}, {0, 1}}
```

Es decir, la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ es la matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

2.b. Representando A como producto de matrices elementales inversas a las que fueron usadas para obtener A^{-1}

Para "despejar" a la matriz **A** en términos de matrices elementales, necesitamos las matrices elementales inversas.
Observa que es diferente la forma de obtener la inversa para cada tipo de matriz elemental:

Para una matriz del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{k} \end{pmatrix}$ la matriz inversa es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{k}} \end{pmatrix}$

Para una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \mathbf{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz inversa es $\begin{pmatrix} \frac{1}{\mathbf{k}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para una matriz del tipo $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz inversa es $\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para una matriz del tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{k} & 1 \end{pmatrix}$ la matriz inversa es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathbf{k} & 1 \end{pmatrix}$

Para la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz inversa es la misma $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

En el inciso anterior encontramos un producto de matrices elementales que al aplicarlas a la matriz **A** se obtiene la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Observa que entre los dos lados de la ecuación se escriben dos signos de igual ==. Si está correcto lo que escribimos, *Mathematica* debe responder **True**, indicando que es cierto que el lado izquierdo de la ecuación es igual al lado derecho:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
True
```

Para avanzar en el "despeje" de **A**, quitamos del lado izquierdo una matriz, y del lado derecho ponemos su inversa. Si está correcto lo que escribimos, *Mathematica* debe responder **True**, indicando que es cierto que el lado izquierdo de la ecuación es igual al lado derecho:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
True
```

Para avanzar en el "despeje" de **A**, quitamos del lado izquierdo una matriz, y del lado derecho ponemos su inversa. Si está correcto lo que escribimos, *Mathematica* debe responder **True**, indicando que es cierto que el lado izquierdo de la ecuación es igual al lado derecho:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
True
```

Para avanzar en el "despeje" de **A**, quitamos del lado izquierdo una matriz, y del lado derecho ponemos su inversa. Si está correcto lo que escribimos, *Mathematica* debe responder **True**, indicando que es cierto que el lado izquierdo de la ecuación es igual al lado derecho:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
True
```

Para avanzar en el "despeje" de **A**, quitamos del lado izquierdo una matriz, y del lado derecho ponemos su inversa. Si está correcto lo que escribimos, *Mathematica* debe responder **True**, indicando que es cierto que el lado izquierdo de la ecuación es igual al lado derecho:

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
True
```

Finalmente podemos quitar la matriz identidad del lado derecho, ya que la multiplicación por la identidad da lo mismo:

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
True
```

Comprobamos que nuestro producto de matrices da la matriz **A**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

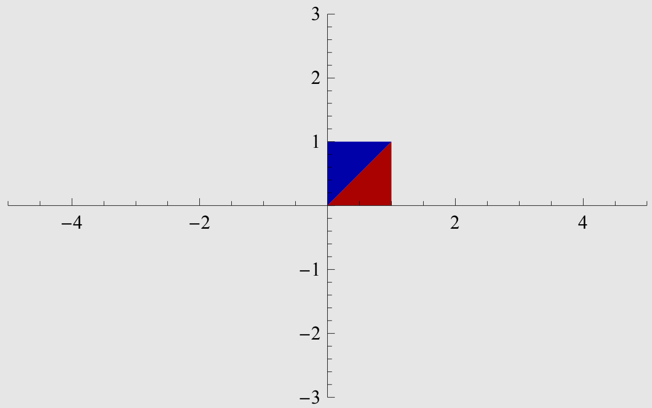
$$\left\{\left\{3, \frac{3}{2}\right\}, \left\{1, \frac{3}{2}\right\}\right\}$$

Es decir, la matriz $\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ es el resultado de la multiplicación $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.c. Efecto geométrico de las matrices elementales del inciso anterior

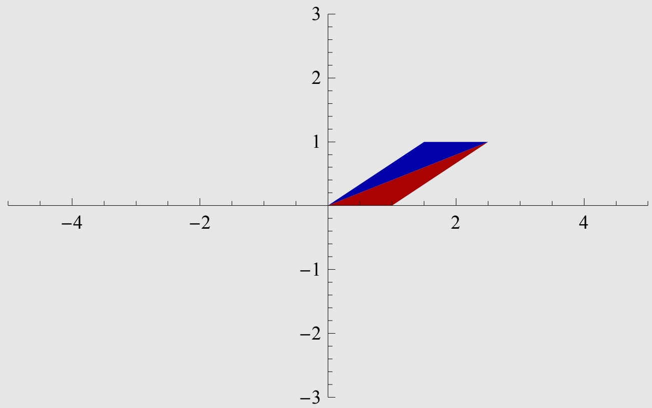
Este es el cuadrado unitario

```
Graphics[
 GraphicsComplex[
  { {0, 0}, {1, 0}, {1, 1}, {0, 1} },
  { Darker[Red], Polygon[ {1, 2, 3} ],
   Darker[Blue], Polygon[ {3, 4, 1} ] } ],
 PlotRange → {{-5, 5}, {-3, 3}}, Axes → True]
```



Al cuadrado unitario le aplicamos la primera (**de derecha a izquierda**) de las matrices que encontramos antes:

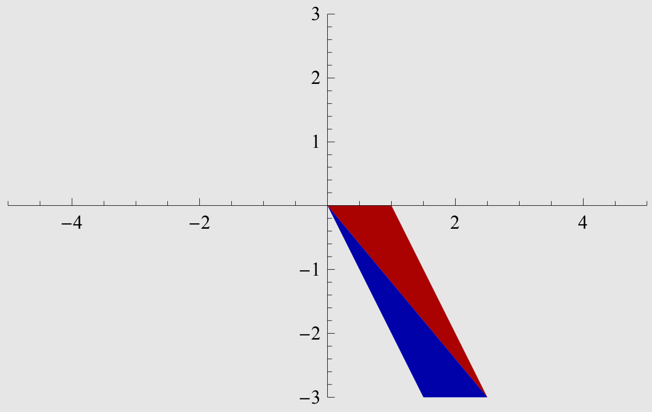
```
Graphics[
 GeometricTransformation[
  GraphicsComplex[
   { {0, 0},  {1, 0}, {1, 1}, {0, 1} },
   { Darker[Red],  Polygon[ {1, 2, 3} ],
    Darker[Blue], Polygon[ {3, 4, 1} ] } ],
  (1  3/2
   0  1)
 ],
 PlotRange → {{-5, 5}, {-3, 3}}, Axes → True]
```



A la figura que resultó, le aplicamos la siguiente matriz a la izquierda:

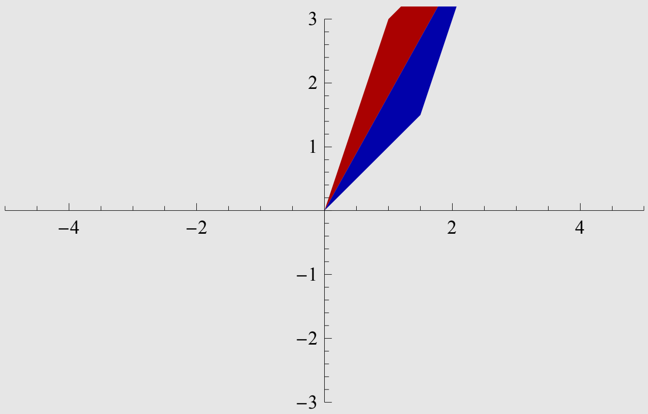
```
Graphics[
 GeometricTransformation[
  GraphicsComplex[
   { {0, 0}, {1, 0}, {1, 1}, {0, 1} },
   { Darker[Red], Polygon[ {1, 2, 3} ],
    Darker[Blue], Polygon[ {3, 4, 1} ] } ],
  (1  0 ; 0 -3) . (1  3/2 ; 0  1)
 ],
 PlotRange → {{-5, 5}, {-3, 3}}, Axes → True]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



A la figura que resultó, le aplicamos la siguiente matriz a la izquierda:

```
Graphics[
 GeometricTransformation[
  GraphicsComplex[
   { {0, 0},  {1, 0}, {1, 1}, {0, 1} },
   { Darker[Red],  Polygon[ {1, 2, 3} ],
    Darker[Blue], Polygon[ {3, 4, 1} ] } ],
```
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
```
 ],
 PlotRange → {{-5, 5}, {-3, 3}}, Axes → True]
```

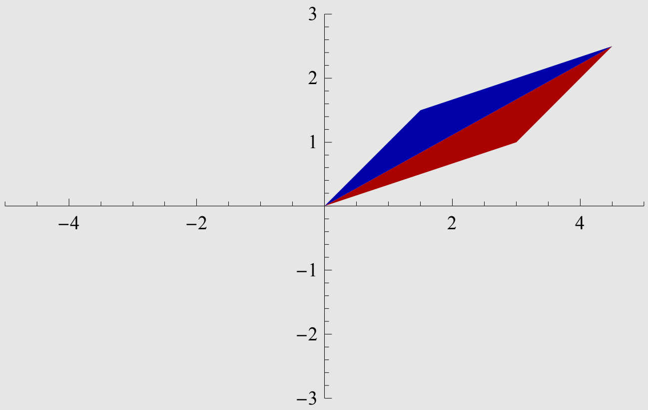


Finalmente aplicamos todas las matrices que se encontraron en el inciso anterior:

```
Graphics[
 GeometricTransformation[
  GraphicsComplex[
   { {0, 0},  {1, 0}, {1, 1}, {0, 1} },
   { Darker[Red],  Polygon[ {1, 2, 3} ],
    Darker[Blue], Polygon[ {3, 4, 1} ] } ],
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
 ],
 PlotRange → {{-5, 5}, {-3, 3}}, Axes → True]
```

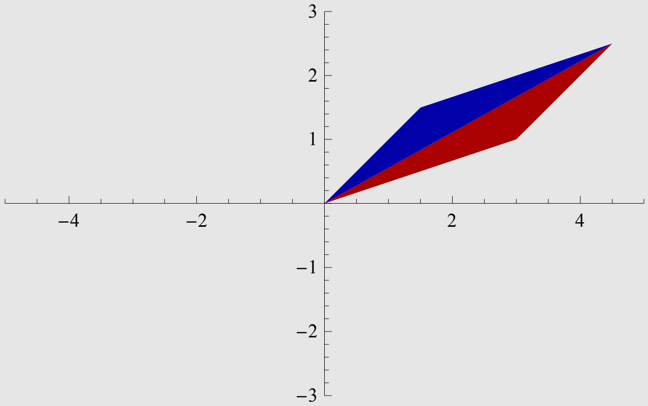


Podemos ver que la matriz **A** por si sola tiene el mismo efecto total que todas las matrices encontradas en el inciso anterior:

```
Graphics[
 GeometricTransformation[
  GraphicsComplex[
   { {0, 0},  {1, 0}, {1, 1}, {0, 1} },
   { Darker[Red],  Polygon[ {1, 2, 3} ],
    Darker[Blue], Polygon[ {3, 4, 1} ] } ],
```

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

```
 ],
 PlotRange → {{-5, 5}, {-3, 3}}, Axes → True]
```



Ejercicio E1

Realiza las siguientes operaciones para la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

E1.a. *Usa productos con matrices elementales para obtener* $\mathbf{A}^{-1}$*, es decir, la inversa de la matriz* ***A****.*
E1.b. *Representa a la matriz* ***A*** *como un producto de las matrices elementales inversas a las obtenidas en el incisio anterior.*
E1.c. *Muestra gráficamente como cada operación elemental del inciso anterior va transformando al cuadrado unitario hasta obtener la misma transformación total que lleva a cabo la matriz* ***A****.*

Ejercicio E2

Realiza las siguientes operaciones para la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

E2.a. *Usa productos con matrices elementales para obtener* $\mathbf{A}^{-1}$*, es decir, la inversa de la matriz* ***A****.*
E2.b. *Representa a la matriz* ***A*** *como un producto de las matrices elementales inversas a las obtenidas en el incisio anterior.*
E2.c. *Muestra gráficamente como cada operación elemental del inciso anterior va transformando al cuadrado unitario hasta obtener la misma transformación total que lleva a cabo la matriz* ***A****.*

José Luis Gómez-Muñoz
http://homepage.cem.itesm.mx/lgomez/